**Методы решения иррациональных уравнений и неравенств**

*Практикум-пособие и методические рекомендации для учащихся и преподавателей математики*

**Составитель:**

**преподаватель математики**

**МБОУ «СОШ с.Булгат-Ирзу им. Х.А.Арзамиева»**

**Абдурахманов О.Д.**

**с.Булгат-Ирзу, 2023**

**От автора:** Одной из трудно усваиваемых тем учащимися и студентами на уроках математики являются иррациональные уравнения и неравенства. В пособии рассмотрены основные теоретические понятия и формулы, которые необходимо знать для успешного решения иррациональных уравнений и неравенств. Рассмотрены подробные примеры решения некоторых иррациональных уравнений и неравенств. Подобраны задания для самостоятельного решения и тест для проверки усвоения теоретических основ и методологи решения иррациональных уравнений и неравенств. Методические рекомендации призваны помочь при самостоятельном изучении, повторении данной темы и при подготовке к ЕГЭ**.**

**Иррациональные уравнения.**

**Иррациональными** называются уравнения, в которых переменные или рациональные функции находятся под **знаком корня** (радикала).

Примерами таких уравнений могут служить:

http://gymn22.narod.ru/Systems/Shaova/Image4.gif

Понятие корня уравнения и его решения для иррациональных уравнений определяют так же, как и для рациональных.

Умение решать иррациональные неравенства пригодиться на практике в частности при подготовке и сдаче ЕГЭ профильного уровня по математике.

Все корни **четной** степени, входящие в уравнение, являются **арифметическими**.

Другими словами, *если подкоренное выражение отрицательно, то корень лишен смысла, если подкоренное выражение равно нулю, то корень так же равен нулю; если подкоренное выражение положительно, то и значение корня положительно.*

Все корни **нечетной** степени, входящие в уравнение, **определены при любых** действительных значениях подкоренного выражения.

Функции и являются возрастающими на своей области определения.

Используя эти свойства функции, в некоторых случаях можно установить, что уравнение не имеет решения, не прибегая к равносильным преобразованиям в области определения уравнения.

**Пример 1.** Докажите, что уравнение не имеет решения.

Арифметический корень не может быть отрицательным числом, поэтому данное уравнение решений не имеет.

2)Уравнение не имеет решений, т.к. сумма двух неотрицательных выражений равна нулю, только тогда когда каждое выражение равно нулю, а данные выражения одновременно в ноль не обращаются.

. Выражение определено при , а выражение определено при . Следовательно, не существует значения*x*, при котором оба выражения имеют смысл, поэтому уравнение не имеет решений.

Одним из стандартных приемов решения иррациональных уравнений является освобождение от радикалов путем возведения обеих частей уравнения в соответствующую степень. Но следует помнить, что подобное преобразование не всегда является равносильным (эквивалентным), в частности при возведении в четную степень. Поэтому необходима обязательная проверка полученных корней уравнения.

При возведении правой и левой части уравнения в нечетную степень  мы можем не опасаться  получить посторонние корни.

**Пример 2.** Решим уравнение

Возведем обе части уравнения в третью степень. Получим равносильное уравнение:

Перенесем все слагаемые в одну сторону и вынесем за скобки*х*: Получим

. Произведение двух множителей равно нулю тогда и только тогда, когда один из множителей равен нулю.

Приравниваем каждый множитель к нулю, получим:

x1=0; x2=1; x3=2

Ответ: {0;1;2}

**Приобретение посторонних корней при решении иррациональных уравнений.**

Решение иррациональных уравнений основано на следующем утверждении:

**Теорема**.

Если n>0 - нечетное число (n=2k+1), то уравнения ***fn(x)=gn(x)*** и ***f(x)=g(x)*** равносильны.

Если n>0 - четное число (n=2k), то любой корень уравнения ***fn(x)=gn(x)***удовлетворяет хотя бы одному из уравнений: ***f(x)=g(x)*** и***f(x)=-g(x)***.

Из теоремы следует, что если в ходе решения иррационального уравнения приходилось возводить обе части в степень с четным показателем, то могут появиться **"посторонние"**корни уравнения.

Итак, что же происходит, каковы **причины появления посторонних корней**:

а) за счет возможного расширения ОДЗ исходного уравнения (т.е. ОДЗ полученного после возведения в четную степень уравнения шире, чем ОДЗ исходного заданного уравнения);

б) за счет возведения в четную степень левой и правой частей иррационального уравнения, обе части которых по абсолютной величине равны, одна - положительна, а другая отрицательна.

**3.Решение иррациональных уравнений путем замены уравнения его следствием.**

Решение иррациональных уравнений путем замены уравнения его следствием (с последующей проверкой корней) можно производить следующим образом:

1. Найти ОДЗ исходного уравнения.
2. Перейти от уравнения к его следствию.
3. Найти корни полученного уравнения.
4. Проверить, являются ли найденные корни корнями исходного уравнения.

**4.Проверка корней.**

Проверка корней подстановкой найденного значения в исходное уравнение сама по себе может оказать сложной задачей. Однако, чтобы исключить посторонние корни, не всегда необходимо подставлять найденные корни в данное уравнение. Иногда возможна проверка корней по ОДЗ уравнения.

При решении иррациональных уравнений удобно и полезно следующие утверждения:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Уравнение вида** | **Равносильно** | **Системе / совокупности систем уравнений/** |
|  |  |
|  |  |
|  | Одной из равносильных систем:  или  *Выбирается та система, в которой проще неравенство*. |
|  |  |
|  |  |  |

**Пример 3**

<=>

**Ответ: 3.**

b) <=><=><=><=>x=2.  **Ответ: 2**

**5.Формулы, применяемые при решении иррациональных уравнений.**

Пусть f(x) и g(x***)*** - некоторые функции, к- целое число, тогда:

1.

2.

3.

4.

5.

Для каждой из формул 1-5 (без учета указанных ограничений) ОДЗ правой ее части может быть шире ОДЗ левой.

Отсюда следует, что преобразования уравнений с формальным использованием формул 1-5 “слева–направо”, приводят к уравнению, являющемуся следствием исходного.

В этом случае могут появиться посторонние корни исходного уравнения, поэтому обязательным этапом в решении исходного уравнения является проверка.

Преобразование уравнений с формальным использованием формул 1-5 “справа – налево” **недопустимо**, т.к. возможно сужение ОДЗ исходного уравнения, следовательно, и потеря корней.

Так, например, если заменить уравнение (ОДЗ: ) уравнением (ОДЗ: ), то произойдет сужение ОДЗ исходного уравнения и потеря корня x=-1.

**Пример 4.**

a) <=><=>

<=>

 <=><=><=>

<=><=>

Ответ: 3; 1,4 .

b) <=>

<=><=><=> x=6,5∨ x=-3,5

Ответ: 6,5 ; -3,5.

**6. Решение уравнений с использованием замены переменной.**

Введение вспомогательной переменной в ряде случаев приводит к упрощению уравнения. Чаще всего в качестве новой переменной используют входящий в уравнение радикал. При этом уравнение становится рациональным относительно новой переменной.

**Пример 5.**

**a)**

Пусть тогда исходное уравнение примет вид: корни которого y=6и . Решая уравнение , получаем x=3 и x=-4,5.

Ответ:

В следующих примерах используется более сложная замена переменной.

**b)**

Перенесем в левую часть все члены уравнения и произведем дополнительные преобразования:

Замена приводит уравнение к видукорнями которого являются y=1 и y=-2

Осталось решить совокупность двух уравнений:

<=><=><=>x=0

Ответ: {0}

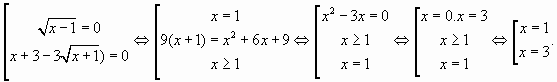
**7. Метод разложения на множители выражений, входящих в уравнение.**

**Теорема.** Уравнение , определенное на всей числовой оси, равносильно совокупности уравнений

**Пример 6.**

http://festival.1september.ru/articles/312257/image437.gif

При**http://festival.1september.ru/articles/312257/image438.gif**уравнение принимает вид:http://festival.1september.ru/articles/312257/image439.gif которое равносильно совокупности двух уравнений:

http://festival.1september.ru/articles/312257/image440.gif

Ответ: http://festival.1september.ru/articles/312257/image442.gif

Выделить общий множитель часто бывает очень трудно. Иногда это удается сделать после дополнительных преобразований. В приведенном ниже примере для этого рассматриваются попарные разности подкоренных выражений.

**Пример 7.**

http://festival.1september.ru/articles/312257/image443.gif

Если внимательно посмотреть на уравнение, то можно увидеть, что разности подкоренных выражений первого и третьего , а также второго и четвертого членов этого уравнения равны одной и той же величине http://festival.1september.ru/articles/312257/image444.gif

В таком случае далее следует воспользоваться тождеством:

http://festival.1september.ru/articles/312257/image445.gif

Уравнение примет вид:

http://festival.1september.ru/articles/312257/image446.gifили

http://festival.1september.ru/articles/312257/image447.gif

Корень уравнения 2x+4=0 т.е. число x=-2при подстановке в исходное уравнение дает верное равенство.

Уравнение http://festival.1september.ru/articles/312257/image450.gifне имеет решений, так как его левая часть положительна в своей области определения.

Ответ: {-2}.

**8. Метод выделения полных квадратов при решении иррациональных уравнений.**

При решении некоторых иррациональных уравнений полезна формула.

**Пример 8.**

**http://festival.1september.ru/articles/312257/image453.gif**

Преобразуем уравнение следующим образом**:**

**http://festival.1september.ru/articles/312257/image454.gif**

или

**http://festival.1september.ru/articles/312257/image455.gif**

Обозначим **http://festival.1september.ru/articles/312257/image456.gif**и решим полученное уравнениеметодом интервалов**.**

**http://festival.1september.ru/articles/312257/image457.gif**

Разбирая отдельнослучаи, находим, что решениями последнего уравнения являются .

Возвращаясь к переменной http://festival.1september.ru/articles/312257/image460.gif, получаем неравенства

http://festival.1september.ru/articles/312257/image461.gif

http://festival.1september.ru/articles/312257/image462.gif

http://festival.1september.ru/articles/312257/image463.gif

Ответ:http://festival.1september.ru/articles/312257/image463.gif

**Иррациональные неравенства и методы их решения.**

Основным методом решения иррациональных неравенств является метод сведения исходного неравенства к равносильной системе рациональных неравенств или совокупности таких систем. Чтобы избежать ошибок при решении иррациональных неравенств, следует рассматривать только те значения переменной, при которых все входящие в неравенство функции определены, т.е. найти ООН этого неравенства, а затем обоснованно осуществлять равносильный переход на всей ООН или ее частях.

Рассмотрим решение неравенства вида   sqrt{f(x)}< sqrt{g(x)}.

Чтобы его решить, нужно обе части неравенства возвести в квадрат и вовремя вспомнить об ООН: подкоренное выражение меньшего из корней должно быть неотрицательным – тогда подкоренное выражение большего корня автоматически будет больше нуля. Таким образом, неравенство вида   sqrt{f(x)}< sqrt{g(x)}равносильно системе неравенств: delim{lbrace}{matrix{2}{1}{{f(x)<g(x)} {f(x)>=0} }}{ } » title=»delim{lbrace}{matrix{2}{1}{{f(x)<g(x)} {f(x)>=0} }}{ } »/><img src=.

Практически все сложные иррациональные неравенства, в конечном итоге сводятся к базовым иррациональным неравенствам двух типов.

Иррациональные неравенства **первого типа**:    sqrt{f(x)}<g(x).

Заметим, что в левой части неравенства стоит квадратный корень, который принимает только неотрицательные значения, следовательно, чтобы неравенство имело решения, правая часть должна быть положительной.

Получаем первое условие: *g(x)>0*.

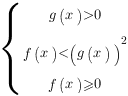
Чтобы решить неравенство, нам нужно обе части возвести в квадрат.

Получаем второе условие: *f(x)<(g(x))2* .

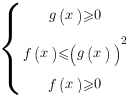
Возведение в квадрат может привести к появлению  посторонних корней, поэтому не забываем про ООН: подкоренное выражение   должно быть неотрицательным.

Получили третье условие: .

Итак, неравенство вида    sqrt{f(x)}<g(x)равносильно системе неравенств:



Аналогично, нестрогое неравенство   sqrt{f(x)}<=g(x)  равносильно системе неравенств:



Иррациональные неравенства **второго типа**:    sqrt{f(x)}>g(x)» title=»  sqrt{f(x)}>g(x)»/> <img src=.

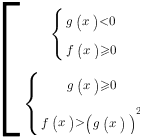
Не смотря на то, что это неравенство с виду похоже на неравенство первого типа, оно принципиально от него отличается.

Поскольку в левой части неравенства стоит квадратный корень, левая часть всегда неотрицательна, поэтому

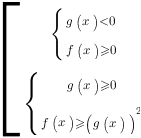
если *g(x)<0*, то неравенство   sqrt{f(x)}>g(x)» title=»  sqrt{f(x)}>g(x)»/><img src=выполняется при любом [допустимом значении x](http://ege-ok.ru/2012/01/13/oblast-dopustimyih-znacheniy/), то есть при f(x)>=0″ title=»f(x)>=0″/><img src=.

если g(x) >=0″ title=»g(x) >=0″/><img src=, то мы можем обе части неравенства возвести в квадрат, получим f(x)>{(g(x))}^2″ title=»f(x)>{(g(x))}^2″/><img src=, и условие на ООНf(x)>0″ title=»f(x)>0″/><img src=будет автоматически следовать из этого неравенства.

Итак, неравенство вида    sqrt{f(x)}>g(x)» title=»  sqrt{f(x)}>g(x)»/><img src=равносильно совокупности двух систем неравенств:



Нестрогое неравенство вида   sqrt{f(x)}>=g(x)» title=»  sqrt{f(x)}>=g(x)»/><img src= равносильно совокупности:



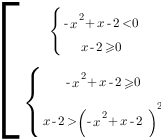
Рассмотрим примеры решения иррациональных неравенств.

**Пример 9.**

**a)**Решить неравенство:

sqrt{x-2}>-x^2+x-2″ title=»sqrt{x-2}>-x^2+x-2″/><img src=

Это неравенство второго типа, оно равносильно совокупности двух систем:



Решим каждое неравенство:

1.  -x^2+x-2 <0<=>x^2-x+2 >0″ title=»x^2-x+2 >0″/><img src=

D=1-8=-7, старший коэффициент больше нуля, следовательно, это неравенство верно при любом значении х. Решением первой системы будет решение ее второго неравенства: x≥2.

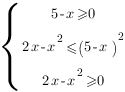
2.  -x^2+x-2 >=0″ title=» -x^2+x-2 >=0″/> <img src=  Очевидно, что это неравенство не имеет решений. Следовательно, и вся вторая система не имеет решений.

Ответ: x≥2.

**b)** Решить неравенство:

sqrt{2x-x^2}<5-x   

Это иррациональное неравенство первого типа, и оно равносильно системе трех неравенств:



Решим каждое неравенство:

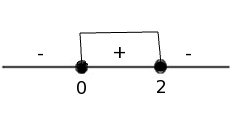
1.  5-x>=0″ title=» 5-x>=0″/><img src=<=>x<=5  

2. 2x-x^2<={(5-x )}^2<=>2x-x^2<=25-10x+25 <=>2x^2-12x+25>=0  » title=»2x^2-12x+25>=0  »/><img src=

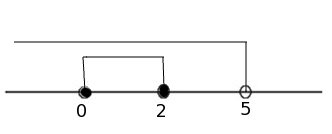
D=144-200<0, следовательно, это неравенство верно при любом значении х.

3. 2x-x^2>=0″ title=»2x-x^2>=0″/><img src=

x_1=0  x_2=2

[](http://ege-ok.ru/wp-content/uploads/2012/04/fr39.jpg)

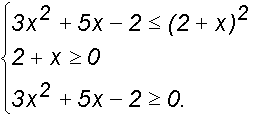
Совместим решения первого и третьего неравенств системы на одной координатной прямой:

[](http://ege-ok.ru/wp-content/uploads/2012/04/fr40.jpg)

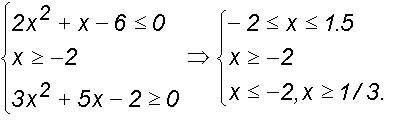
Ответ: 0≤ x ≤ 2.

**c)**http://mikahome.narod.ru/10a/img/kor7.gif

Решение.



Таким образом, необходимо рассмотреть два квадратных и одно линейное неравенство. Их решение не представляет никаких сложностей.



http://mikahome.narod.ru/10a/img/kor10.gif

Объединением этих неравенств будет {-2} [1/3, 1.5].

**КОНТРОЛЬНЫЕВОПРОСЫ**

1. Укажите решение уравнения  http://mikahome.narod.ru/10a/img/kor11.gif

1. 9
2. 12
3. 8
4. 3

2. Иррациональным называется уравнение, где переменная находится:

1. В знаменателе дроби
2. В степени числа
3. Под знаком модуля
4. Под знаком корня

3. Укажите решение уравнения http://mikahome.narod.ru/10a/img/kor12.gif

1. 4
2. -4
3. -4; 4
4. 9

4. Корни какой степени не существуют, если выражение, стоящее под знаком корня положительно?

1. Четной
2. Нечетной
3. Четной и нечетной
4. Все существуют
5. Корни какой степени не существуют, если выражение, стоящее под знаком корня отрицательно?
6. Четной
7. Нечетной
8. Четной и нечетной
9. Все существуют

6. Укажите решение неравенства.

1. x
2. x<-3
3. x
4. x>-3

7. Укажите решение неравенства .

1. x
2. x<-1/2
3. x
4. -2<x<-1/2

**Задачи для самостоятельного решения.**

1. Укажите, какому промежутку принадлежит сумма корней уравнения (или корень, если он один):

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

2. Укажите количество корней уравнения.

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

3. Решите неравенства:

**Литература**

1. Алгебра и начала математического анализа: учеб.для 10-11кл. общеобразоват. учреждений / [А.Н.Колмогоров, А.М.Абрамов, Ю.П.Дудницын и др.]: под ред. А.Н.Колмогорова.- М.: Просвещение, 2008
2. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс. В 2ч. Ч.1. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений (профильный уровень) / А.Г.Мордкович, П.В.Семенов. - М.: Мнемозина, 2009
3. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс. В 2ч. Ч.2. Задачник для учащихся общеобразовательных учреждений (профильный уровень) / А.Г.Мордкович, П.В.Семенов. - М.: Мнемозина, 2009
4. Алгебра и начала анализа: сборник задач для подготовки и проведения итоговой аттестации за курс средней школы / И.Р.Высоцкий, Л.И.Звавич, Б.П.Пигарев и др.;под ред. С.А. Шестакова. - М.: Внешсигма-М, 2007
5. ЕГЭ. Математика. Показательные и логарифмические выражения, функции, уравнения и неравенства / Е.А.Семенко, М.В.Фоменко; под ред. Е.А.Семенко. - М.: Издательство "Экзамен", 2012
6. Математика. Подготовка к ЕГЭ-2011: учебно-методическое пособие / под ред. Ф.Ф.Лысенко, С.Ю.Кулабухова. - Ростов-наДону: Легион, 2010.

**Ключ к тесту**

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| б | г | в | г | а | в | б |